並列待ち行列システムにおける ある割当問題(最適化理論と数理構造)

AUTHOR(S):

小柳, 淳二; 河合, 一

数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 41-46

並列待ち行列システムにおける ある割当問題

鳥取大学工学部　*小柳　淳二　(KOYANAGI Junji)
河合　　一　(KAWAI Hajime)

1　はじめに

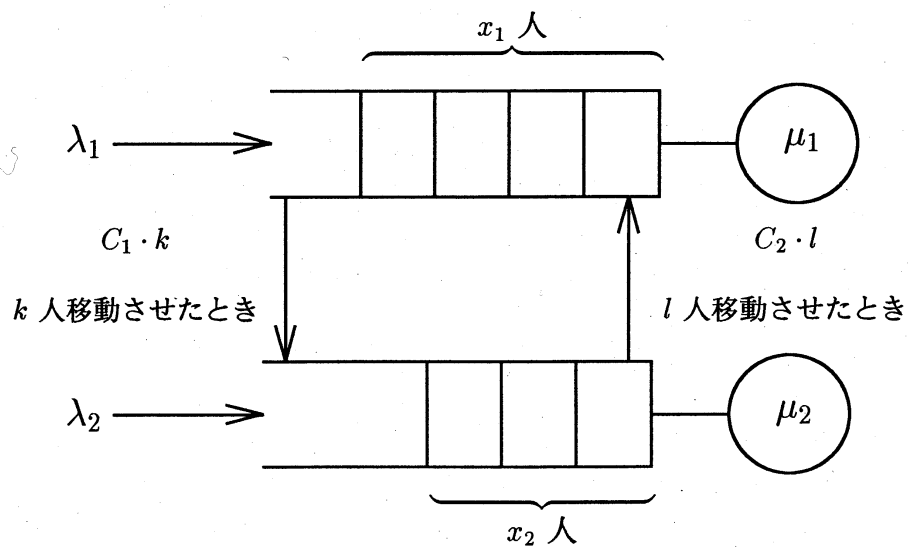
2 個またはそれ以上のサービスステーションをもつ並列待ち行列システムにおいて, 到着する客を各待ち行列に割り当て, システム内人数やコストなどの最小化をはかる研究が [1], [2] 等に見られるが, 通常考えられているコストはそれぞれの待ち行列にならぶ人数に対して線形であり, また待ち行列に振り分ける際にコストがかかる場合を取り扱ったものは少ないようである.

[5] では, 2 本の待ち行列に独立に客が到着する場合を考え, 待ち行列 1 に客が到着したときに待ち行列 1 から待ち行列 2 に, 任意の人数を人数に比例した移動コストを支払って移動させることができる場合を扱い, 無限期間における総期待割引コストを最小にする政策の性質について述べた.

ここでは, 客がどちらかの待ち行列に到着したとき, 待ち行列に並んでいる客をどちらの方向にも割り当てられる場合を扱う.

2　システムの記述

以下の並列待ち行列システムを考える



- 窓口 1, 窓口 2 のサービス時間はそれぞれ処理率 μ_1, μ_2 の指数分布に従う.

- 待ち行列 1，待ち行列 2 に到着する客はそれぞれ到着率 λ_1, λ_2 の独立なポアソン過程に従う.
- 待ち行列 1 に x_1 人, 待ち行列 2 に x_2 人いるとき単位時間当たり $H(x)$ $(x = (x_1, x_2))$ の holding cost がかかる.
- 意思決定者は待ち行列 1, 2 を観察することができ, 決定はいずれかの待ち行列に客が到着したときのみ行われ, 何人の客を一方の待ち行列から他方の待ち行列に移動させるかを決定することができる.
- 客の移動は瞬時に行なわれるものとし，待ち行列 1 から 2 に一人移すごとに割り当てコスト C_1 がかかり, その逆の時は，割り当てコスト C_2 がかかるものとする.

状態として $x = (x_1, x_2)$ （x_1 は待ち行列 1 のシステム内人数, x_2 は待ち行列 2 のシステム内人数）をとり, 以下の 4 つのオペレータを定義する.

$D_1 \ : \ D_1^k x = ([x_1 - k]^+, x_2)$

$D_2 \ : \ D_2^k x = (x_1, [x_2 - k]^+)$

$A_1 \ : \ A_1^k x = (x_1 + k, x_2)$

$A_2 \ : \ A_2^k x = (x_1, x_2 + k)$

ここで $[y]^+ = \max\{0, y\}$ とする.

待ち行列 1 または 2 に客が到着し, 状態 $x = (x_1, x_2)$ になったときの最適総期待割引コスト (割引率 α) を $V(x)$ とし, $U(x;\, k)$ は 1 から 2 に k 人移動させ (k が負の時 2 から 1 に $-k$ 人移動させることを示す)，その後最適なアクションをとったときの総期待割引コストをあらわすものとする．待ち行列から退去があるか, またはいずれかの待ち行列から客が移動させられ状態 $x = (x_1, x_2)$ になったときの最適総期待割引コストを $W(x)$ とする.

$V(x)$, $W(x)$ $U(x;\, k)$ は以下の最適性方程式を満たすことがわかる

$$V(x) = \min_{k=-x_2,\ldots,x_1} U(x;k),$$

$$U(x;\, k) = \begin{cases} C_1 k + W(D_1^k A_2^k x), & k \geq 0 \\ -C_2 k + W(D_2^{-k} A_1^{-k} x), & k < 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \frac{H(x)}{\Lambda} + \frac{\lambda_1}{\Lambda} V(A_1 x) + \frac{\lambda_2}{\Lambda} V(A_2 x) + \frac{\mu_1}{\Lambda} W(D_1 x) + \frac{\mu_2}{\Lambda} W(D_2 x),$$

$$\text{ここで} \quad \Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \alpha.$$

$M(x)$ として $U(x;\, k)$ の最小を与える k の中で最小のものをとる．すなわち

$$M(x) = \min\{\arg\min U(x;\, k)\}.$$

3 最適政策の性質

以下の関数の集合 P, Q, R, S, T を定義する.

$$P = \{f | f(A_1 x) \geq f(x) \quad \text{かつ} \quad f(A_2 x) \geq f(x)\},$$

$$Q = \{f | f(A_2^2 x) - 2f(A_2 x) + f(x) \geq 0, \text{ かつ } f(A_1^2 x) - 2f(A_1 x) + f(x) \geq 0\},$$
$$R = \{f | f(A_2 x) - f(A_1 x) - f(A_1 A_2 x) + f(A_1^2 x) \geq 0\},$$
$$S = \{f | f(A_2^2 x) - f(A_2 x) - f(A_1 A_2 x) + f(A_1 x) \geq 0\},$$
$$T = \{f | f(A_1 A_2 x) - f(A_2 x) - f(A_1 x) + f(x) \geq 0\}.$$

性質 R, S から $f(A_1^2 x) - 2f(A_1 A_2 x) - f(A_2^2 x) \geq 0$ である. 以降 $H(x) \in P \cap Q \cap R \cap S \cap T$ とする.

最適性方程式をとくため, 逐次近似法により $V^n(x)$, $W^n(x)$ を以下のように更新する.

$$
\begin{aligned}
&V^0(x), W^0(x) \equiv 0 \\
&\quad W^{n+1}(x) = \frac{H(x)}{\Lambda} + \frac{\lambda_1}{\Lambda} V^n(A_1 x) + \frac{\lambda_2}{\Lambda} W^n(A_2 x) + \frac{\mu_1}{\Lambda} W^n(D_1 x) + \frac{\mu_2}{\Lambda} W^n(D_2 x), \\
&\quad U^{n+1}(x; k) = \begin{cases} C_1 k + W^n(D_1^k A_2^k x), & k \geq 0 \\ -C_2 k + W^n(D_2^{-k} A_1^{-k} x), & k < 0 \end{cases} \\
&\quad V^{n+1}(x) = \min_{k=-x_2,\ldots,x_1} U^{n+1}(x; k). \\
&\quad M^{n+1}(x) = \min\{\arg\min U^{n+1}(x; k)\}
\end{aligned}
$$

$H(x)$, μ_i, λ_i, $(i = 1, 2)$ に関する適当な条件のもとで $V^n(x)$, $W^n(x)$ は $V(x)$, $W(x)$ に収束することが知られている.

補題 1
$V^n(x), W^n(x) \in P \cap Q \cap R \cap S \cap T$ なら $W^{n+1}(x) \in P \cap Q \cap R \cap S \cap T$. □

証明略.

以上の性質から最適アクションを定める関数 $U^{n+1}(x; k)$ について次のことが言える。

補題 2
$U^{n+1}(x; k)$ は以下の性質を持つ.

1. $U^{n+1}(x; k+2) - 2U^{n+1}(x; k+1) + U^{n+1}(x; k) \geq 0 \quad (-x_2 \leq k \leq x_1 - 2)$.
2. $U^{n+1}(x; k+1) - U^{n+1}(x; k) \geq U^{n+1}(A_1 x; k+1) - U^{n+1}(A_1 x; k) \quad (-x_2 \leq k \leq x_1 - 1)$.
3. $U^{n+1}(A_2 x; k+1) - U^{n+1}(A_2 x; k) \geq U^{n+1}(x; k+1) - U^{n+1}(x; k) \quad (-x_2 \leq k \leq x_1 - 1)$.

証明略

1\. から移動人数 k について凸性があることがわかり, 2. から $M^{n+1}(x) \leq M^{n+1}(A_1 x)$, 3. から $M^{n+1}(A_2 x) \leq M^{n+1}(x)$ がわかる.

補題 3
$M^{n+1}(x) = K$ とすると

1. $M^{n+1}(D_1 A_2 x) = K - 1$ ($K \neq 0$ のとき),
   $M^{n+1}(D_1 A_2 x) = 0$ または -1 ($K = 0$ のとき),
2. $M^{n+1}(A_1 x) = K$ または $K + 1$.
3. $M^{n+1}(A_2 x) = K$ または $K - 1$. □

略証

まず補題 2. の 2. 3. から $M^{n+1}(x) \leq M^{n+1}(A_1x)$, $M^{n+1}(A_2x) \leq M^{n+1}(x)$ に注意する.
$U^{n+1}(D_1A_2x;k)$ と $U^{n+1}(x;k)$ を比較すると
・$k>0$ のとき

$$U^{n+1}(D_1A_2x;k) - U^{n+1}(D_1A_2x;k-1) - U^{n+1}(x;k+1) + U^{n+1}(x;k) = 0 \quad (k=1,\ldots,x_1-1)$$

となる. よって $U^{n+1}(D_1A_2x;k)$ のグラフは $U^{n+1}(x;k)$ のグラフを左下または左上に平行移動したものであることがわかる. $k<0$ でも同様のことがいえるので $M^{n+1}(D_1A_2x) = K-1$ ($K \neq 0$ のとき) である.

$K=0$ のときは $U^{n+1}(x;2) - U^{n+1}(x;1) \geq 0$, $U^{n+1}(x;0) - U^{n+1}(x;-1) < 0$ であるから $U^{n+1}(D_1A_2x;1) - U^{n+1}(D_1A_2x;0) \geq 0$, $U^{n+1}(D_1A_2x;-1) - U^{n+1}(D_1A_2x;-2) < 0$ となり $M^{n+1}(D_1A_2x)$ は -1 または 0 で与えられる.

2. の証明

$M^{n+1}(x) = K$ ($K \geq 0$) として $U^{n+1}(A_1x;K+2) - U^{n+1}(A_1x;K+1) \geq 0$ を示す.

$$\begin{aligned}
&[U^{n+1}(A_1x;K+2) - U^{n+1}(A_1x;K+1)] - [U^{n+1}(x;K+1) - U^{n+1}(x;K)] \\
&= [W^{n+1}(D_1^{K+2}A_2^{K+2}A_1x) - W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+1}A_1x)] \\
&\quad - [W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+1}x) - W^{n+1}(D_1^{K}A_2^{K}x)] \\
&= W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+2}x) - W^{n+1}(D_1^{K}A_2^{K+1}x) - W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+1}x) + W^{n+1}(D_1^{K}A_2^{K}x) \\
&\geq 0 \quad (y = D_1^{K}A_2^{K}x \text{ として } W^{n+1}(x) \in S \text{を用いる.})
\end{aligned}$$

$U^{n+1}(x;K+1) - U^{n+1}(x;K) \geq 0$ に注意して, $U^{n+1}(A_1x;K+2) - U^{n+1}(A_1x;K+1) \geq 0$ を得る.

$K=-1$ のときは

$$\begin{aligned}
&U^{n+1}(A_1x;1) - U^{n+1}(A_1x;0) - [U^{n+1}(A_1x;0) - U^{n+1}(A_1x;-1)] \\
&= C_1 + W^{n+1}(A_2x) - W^{n+1}(A_1x) - [W^{n+1}(A_1x) - C_2 - U^{n+1}(D_2A_1^2x)] \geq 0 \quad (W(x) \in Q)
\end{aligned}$$

$K<-1$ のときは $K \geq 0$ のときと同様にしてできる.

3. の証明

$M^{n+1}(A_2x) \leq M^{n+1}(x)$ より $U^{n+1}(A_2x;K-1) - U^{n+1}(A_2x;K-2) < 0$ を上と同様に示せばよい. □

上の補題から次の補題が出る.

補題 4 $W^{n+1}(x) \in P$, Q, R, S, T なら $V^{n+1}(x) \in P$, Q, R, S, T

証明) 以下では繁雑さを避けるため上添字 $^{n+1}$ を省略する.
$V(x) \in P$ は簡単.
$V(x) \in Q$ の証明.

$M(x) = K$ とすると $0 \leq K \leq x_1$, $K=-1$, $x_2 \leq K \leq -2$ にわけて考える.
$0 \leq K \leq x_1$ のとき

1. $M(A_1^2x) = K+2$

2. $M(A_1^2x) = K+1$
3. $M(A_1^2x) = K$

の場合が考えられる.
1. の場合

$$
\begin{aligned}
&V(A_1^2x) - 2V(A_1x) + V(x) \\
&= C_1(K+2) + W(D_1^{K+2}A_2^{K+2}A_1^2x) - 2V(A_1x) + C_1K + W(D_1^KA_2^Kx) \\
&\geq C_1(K+2) + W(D_1^{K+2}A_2^{K+2}A_1^2x) - 2C_1(K+1) - 2W(D_1^{K+1}A_2^{K+1}A_1x) + C_1K + W(D_1^KA_2^Kx) \\
&\quad (V(A_1x) \leq U(A_1x\,;\,K+1)\ \text{より}) \\
&\geq 0 \quad (W(x) \in Q)
\end{aligned}
$$

2. の場合

$$
\begin{aligned}
&V(A_1^2x) - 2V(A_1x) + V(x) \\
&= C_1(K+1) + W(D_1^{K+1}A_2^{K+1}A_1^2x) - 2V(A_1x) + C_1K + W(D_1^KA_2^Kx) \\
&\geq C_1(K+1) + W(D_1^{K+2}A_2^{K+2}A_1^2x) - C_1(K+1) - W(D_1^{K+1}A_2^{K+1}A_1x) - C_1K - W(D_1^KA_2^Kx) \\
&\quad + C_1K + W(D_1^KA_2^Kx) \quad (V(A_1x) \leq U(A_1x\,;\,K+1),\ V(A_1x) \leq U(A_1x\,;\,K)) \\
&\geq 0 \quad (W(x) \in T)
\end{aligned}
$$

3. の場合
1. と同様である.
$K=-1$, $x_2 \leq K \leq -2$ のときも同様である.

$V(x) \in R$ なども同様に証明できる.

以上で得られた結果をまとめて，帰納法を用いることで $V(x), W(x) \in P,\ Q,\ R,\ S,\ T$ を得る.
以上の補題から次の定理を得る.

定理 1
状態 $x=(x_1,x_2)$ における最適なアクションは次のような構造を持つ.
$i = x_1 + x_2$ に対し，$M((i,0)) = K_i\ (\geq 0)$, $M((0,i)) = L_i\ (\leq 0)$ とすると

$$
\begin{aligned}
M(x) &= K_i - x_2, && K_i - x_2 > 0\ \text{のとき}, \\
M(x) &= L_i + x_1, && L_i + x_1 < 0\ \text{のとき}, \\
M(x) &= 0, && \text{その他のとき},
\end{aligned}
$$

であり，また

$$
K_i \leq K_{i+1} \leq K_i + 1, \quad L_i \geq L_{i+1} \geq L_i - 1,
$$

である. □

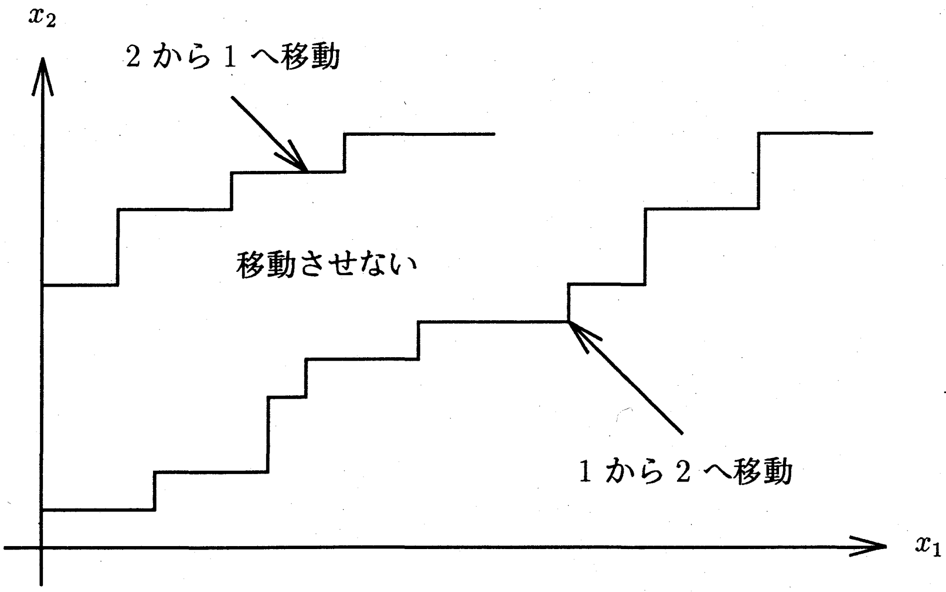
証明)

$$
\begin{aligned}
M(x) &= K_i - x_2, && K_i - x_2 > 0\ \text{のとき}, \\
M(x) &= L_i + x_1, && L_i + x_1 < 0\ \text{のとき}, \\
M(x) &= 0, && \text{その他のとき},
\end{aligned}
$$

は補題 3 の 1. からあきらか.

$$K_i \le K_{i+1} \le K_i + 1, \quad L_i \ge L_{i+1} \ge L_i - 1,$$

は補題 3 の 2. 3. から導出できる.



参考文献

[1] B. Hajek, "Optimal Control of Two Interacting Service Stations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 6, pp. 491–499, 1984.

[2] J. Walrand, "A Note on 'Optimal Control of a Queueing System with Two Heterogeneous Servers'", *Systems and Control Letters*, Vol. 4, pp. 131–134, 1984.

[3] J. Walrand, *An Introduction to Queueing Networks*, Prentice–Hall, 1988.

[4] R. F. Serfozo, " An Equivalence Between Continuous and Discrete Time Markov Decision Process", *Operations Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 616–620, 1979.

[5] 小柳淳二, 河合　一, 2 種の異なるサーバーを持つ並列待ち行列システムのある割当問題, 数理解析研究所講究録 835 最適化の数理とその応用, pp. 36–42, 1993.